La fórmula de Gross
sobre alturas y valores especiales de L-series

Tesis de maestría

María Soledad Villar Lozano
Orientador: Gonzalo Tornaría

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
2 de agosto de 2012

Resumen

La correspondencia de Eichler relaciona en forma no canónica el espacio, intuitivamente analítico, de las formas modulares de peso 2 para $\Gamma_0(N)$, con un espacio intuitivamente algebraico construido a partir la aritmética de órdenes maximales de un álgebra de cuaterniones ramificada en N e infinito, para N primo.

Se define la L-serie $L_{\mathcal{A}}(f, s)$ para f una forma cuspidal de peso 2 para $\Gamma_0(N)$ vector propio para los operadores de Hecke; y $\mathcal{A}$ una clase de ideales en el anillo de enteros $\mathcal{O}_K$ del cuerpo cuadrático imaginario K de discriminante $-D$, con D primo distinto de N.

La fórmula de Gross expresa el valor central $L_{\mathcal{A}}(f, 1)$ en función del producto interno de f con cierta forma modular $G_{\mathcal{A}}$ construida a partir de inmersiones del cuerpo cuadrático de discriminante $-D$ en el álgebra de cuaterniones ramificada en N e infinito, y la correspondencia de Eichler.

En estas páginas se presenta una formulación del resultado de Gross; la demostración, que consiste en una manipulación esencialmente analítica del lado de la L-serie, y una manipulación algebraica del lado de las álgebras de cuaterniones que conducen al mismo resultado; y algunos corolarios relacionados con formas modulares de peso medio entero y la correspondencia de Shimura.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las L-funciones son objetos analíticos que *capturan información aritmética* de distintos objetos matemáticos.

Por ejemplo, en el caso de curvas elípticas, el teorema de Mordell-Weil dice que el grupo de puntos de una curva elíptica E definida sobre un cuerpo de números K, es un grupo abeliano finitamente generado:

$$E(K) \simeq T \oplus \mathbb{Z}^r.$$

La curva elíptica E tiene una L-función asociada $L_E(s)$ cuya continuación analítica y ecuación funcional dependen del teorema de modularidad. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer en su versión débil predice que el rango de la curva elíptica coincide con el orden de anulación de $L_E(s)$ en $s = 1$.

Por otro lado, el célebre teorema de modularidad dice que las curvas elípticas sobre $\mathbb{Q}$ están relacionadas con formas modulares a través de las L-series. Existe una forma cuspidal f de peso 2 que es vector propio para los operadores de Hecke y satisface:

$$L_E(s) = L_f(s).$$

Si f es una forma cuspidal de peso 2 para $\Gamma_0(N)$ (con N primo impar) tal que es vector propio para los operadores de Hecke; la fórmula de Gross da una expresión para el valor central de cierta L-serie $L_{\mathcal{A}}(f,s)$. Esta L-serie se define a partir de f y de la clase de ideales $\mathcal{A}$ en el anillo de enteros $\mathcal{O}_K$ de un cuerpo cuadrático imaginario K de discriminante $-D$, con D primo distinto de N.

Si consideramos la suma de todas las L-series $L_{\mathcal{A}}$ se tiene la siguiente descomposición:

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} L_{\mathcal{A}}(f,1) = L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1)$$

donde $f \otimes \epsilon = \sum_{m \geq 1} a_m \epsilon(m) q^m$ es el *twist* de f por ϵ, el carácter de Dirichlet de K.

De acuerdo a la descomposición, calcular los valores centrales de las L-series $L_{\mathcal{A}}$ permite calcular $L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1)$, y en particular decidir si se anula o no. Además, si $L(f,1) \neq 0$ permite calcular el valor de $L(f \otimes \epsilon, 1)$ para los distintos twists de f. La fórmula de Waldspurger (proposición 3.3.8) dice que $L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1) = \frac{k_f}{\sqrt{D}} m_D^2$ donde k_f es una constante trascendente distinta de cero que depende de f; y m_D es un coeficiente de una forma modular de peso $3/2$ relacionada con f a través de la correspondencia de Shimura.

En este trabajo se presenta el resultado de Gross en el caso en que N y D son primos impares distintos. El capítulo 2 se divide en tres secciones. En 2.1 se introduce brevemente a los espacios de formas modulares y se enuncian propiedades de los operadores de Hecke. En 2.2 se introduce la aritmética de álgebras de cuaterniones. Existe una relación entre las formas modulares de peso 2 para $\Gamma_0(N)$ y la aritmética del álgebra de cuaterniones ramificada en N e infinito. Esa relación es la correspondencia de Eichler, que se explica en la sección 2.3 y es clave en la formulación del resultado de Gross.

En el capítulo 3 presenta la fórmula de Gross y algunos corolarios relacionados con la correspondencia de Shimura. El capítulo 4 demuestra la fórmula de Gross en el caso N y D primos impares distintos.

Capítulo 2

Correspondencia de Eichler

La correspondencia de Eichler relaciona el espacio de formas modulares de peso 2 para $\Gamma_0(N)$ (N primo), con la aritmética de órdenes maximales de un álgebra de cuaterniones ramificada en N e infinito.

La idea detrás de esta relación es la siguiente. Por un lado estos espacios de formas modulares $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))$, son $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno y un álgebra conmutativa de operadores autoadjuntos $\{T_n\}_{n\geq 0}$ llamados operadores de Hecke. Por otro lado, a partir de un álgebra de cuaterniones ramificada en N e infinito, también es posible construir un espacio vectorial análogo con un álgebra de operadores $\{t_n\}_{n\geq 0}$ que actúan a través de las matrices de Brandt. Se puede probar que existe un isomorfismo (no canónico) entre ambos espacios calculando las trazas de estos operadores en ambos espacios y viendo que coinciden. La demostración de esta correspondencia está explicada en [4].

En este capítulo se introduce brevemente el espacio de formas modulares y la aritmética en álgebras de cuaterniones, con el objetivo de presentar la correspondencia de Eichler. Los libros [3] y [7] son referencias introductorias sobre formas modulares, [10] y [1] son referencias en artimética de álgebras de cuaterniones, y en [4] se introduce y demuestra la correspondencia de Eichler. Esta exposición toma ideas del artículo de Gonzalo y Ariel *Shimura correspondence for level p^2 and the special values of L-series* [8] y del curso *Álgebras de cuaterniones y valores centrales de L-series* dictado por Gonzalo Tornaría en la escuela AGRA en la Universidad de Santiago de Chile en abril de 2012.

2.1. Formas modulares

Definición 2.1.1. Llamaremos grupo modular al grupo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] : a,b,c,d \in \mathbb{Z};\ ad-bc=1 \right\}$$

El grupo modular actúa sobre la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a través de las transformaciones de Moëbius:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}}$$

Esta acción en $\hat{\mathbb{C}}$ deja invariante al semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Consideramos los subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \equiv \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \pmod{N} \right\}$$
$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \equiv \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right] \pmod{N} \right\}$$

Definición 2.1.2. Un subgrupo Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de congruencia de nivel N si $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ para $N \in \mathbb{N}$.

Definición 2.1.3. Sea el operador de peso k definido $(f|_k\gamma)(z) = (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k}f(\gamma z)$, para $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Las formas modulares son funciones holomorfas del semiplano superior invariantes bajo el operador de peso k para algún subgrupo de congruencia Γ. También se pide a las formas modulares que cumplan cierta condición de regularidad que permita que sigan siendo holomorfas al compactificar el dominio. Esta condición de regularidad es ser holomorfa en ciertos puntos llamados cúspides. Las cúspides son las clases de equivalencia bajo la acción de Γ en $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ y resultan ser una cantidad finita porque el índice $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ es finito.

Definición 2.1.4. Sea Γ un grupo de congruencia de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, y sea k un número entero. Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una forma modular de peso k para Γ si verifica las siguientes propiedades:

1. f es holomorfa en $\mathbb{H}$
2. $(f|_k\gamma)(z) = f(z)$ para todo $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$ y todo $z \in \mathbb{H}$
3. $f|_k\alpha$ es holomorfa en ∞ para todo $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, es decir, admite una serie de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_h^n, \quad q_h = e^{\frac{2\pi i z}{h}}$$

donde h es un entero que depende de α.

El conjunto de formas modulares de peso k para Γ será $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ y resulta ser un espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 2.1.5. Una forma modular f de peso k para Γ se dice cuspidal si el valor de f es 0 en todas las cúspides. Es decir, el coeficiente a_0 de la serie de Fourier de $f|_k\alpha$ es 0 para todo $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. El conjunto de las formas cuspidales de peso k para Γ será $\mathcal{S}_k(\Gamma)$.

2.1.1. Producto de Petersson y operadores de Hecke

Definición 2.1.6. Sea Γ un subgrupo de congruencia y D un dominio fundamental para la acción de Γ en $\mathbb{H}$. Definiremos el producto interno de Petersson entre dos formas modulares de peso k (al menos una de ellas cuspidal) como:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dxdy, \quad z = x + iy \tag{2.1}$$

Esta integral es convergente siempre que f o g sea una forma cuspidal y no depende del dominio fundamental D.

Los operadores de Hecke forman un álgebra de operadores $(T_n : \mathcal{M}_k(\Gamma) \to \mathcal{M}_k(\Gamma))_{n \geq 0}$ que juega un papel fundamental, y se puede definir de varias maneras. Una forma de definirlos estos operadores es a partir de funciones de retículos en los complejos (ver [7]) o como operadores de doble coclases (ver capítulo 5 de [3]).

En este contexto no necesitaremos trabajar explícitamente con los operadores de Hecke, sino que discutiremos ciertas propiedades que son clave para estudiar la correspondencia de Eichler.

Proposición 2.1.7. *Los operadores de Hecke actuando en $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ satisfacen:*

- *T_n es autoadjunto si n y N son coprimos.*
- *$T_{mn} = T_m T_n$ si m y n son coprimos.*
- *$T_{p^n} = (T_p)^n$ para todo primo $p|N$.*
- *$T_{p^n} = T_{p^{n-1}} T_p - p^{k-1} T_{p^{n-2}}$ para todo primo $p \nmid N$.*

En particular, el álgebra generada por los T_n está generada por $\{T_p : p \text{ primo}\}$ y es conmutativa.

Si estos operadores fueran todos autoadjuntos para el producto interno de Petersson, entonces al ser conmutativos, el teorema espectral nos garantiza la existencia de una base ortonormal de formas modulares, que son vectores propios comunes para todos los operadores de Hecke. Sin embargo, no es cierto en general que estos operadores sean autoadjuntos. Cuando $p|N$ los autoespacios invariantes para T_p pueden tener dimensión mayor que 1 y los operadores de Hecke pueden no ser autoadjuntos.

Sin embargo, es posible considerar un espacio de formas modulares donde los operadores de Hecke sí son autoadjuntos.

Si $M|N$, toda forma modular de peso k para $\Gamma_0(M)$ es también forma modular de peso k para $\Gamma_0(N)$. De hecho, si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(M))$ y $r|\frac{N}{M}$ entonces $g(z) = f(rz) \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$. De esta forma tenemos inmersiones $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(M)) \to \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ (una por cada divisor de $\frac{N}{M}$). La suma de las imágenes de estas inmersiones se llama el espacio de las formas viejas de $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$, ya que son formas modulares que provienen de un nivel menor. El complemento ortogonal al espacio de las formas viejas en $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ es el espacio de las formas nuevas que se escribe como $\mathcal{S}_k^{new}(\Gamma_0(N))$.

Resulta que los espacios propios comunes a los operadores $\{T_p\}$ restricto al espacio de las formas nuevas tienen dimensión 1, y $\mathcal{S}_k^{new}(\Gamma_0(N))$ tiene una base ortonormal de vectores propios comunes a todos los operadores de Hecke.

El caso particular que nos interesa para estudiar la correspondencia de Eichler es el de N primo. En este caso las formas viejas para $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ son las que provienen de $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(1))$. Pero $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(1))$ es trivial, por lo tanto los operadores de Hecke son autoadjuntos en $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ si N es primo.

En el caso donde N no es primo, también es posible considerar una correspondencia de Eichler, donde aparecen órdenes no maximales, pero no lo estudiaremos en esta ocasión.

2.2. Álgebras de cuaterniones

Sea K un cuerpo. Una K-álgebra A es un espacio vectorial sobre K con estructura de anillo con unidad. La estructura de anillo se relaciona con el producto escalar de forma tal que si $k \in K$ y $u, v \in A$ entonces $k(uv) = (ku)v = u(kv)$, es decir, K está en el centro del álgebra. Una K-álgebra es central si el centro del álgebra coincide con K, y es simple si no tiene ideales biláteros no triviales.

Definición 2.2.1 (Álgebra de cuaterniones)**.** Un álgebra de cuaterniones B sobre un cuerpo K es una $K-$álgebra central simple de dimensión 4 sobre K.

Si K es un cuerpo con característica distinta de 2, se puede probar que toda álgebra de cuaterniones B tiene una base como espacio vectorial sobre K: $\{1, i, j, k\}$ que satisface las relaciones: $i^2 = a, j^2 = b, k = ij = -ji$ con $a, b \in K^*$. Recíprocamente, una base que satisface las relaciones anteriores y la propiedad asociativa define un álgebra de cuaterniones sobre K. Usaremos la notación $(a, b)_K$ para referirnos al álgebra de cuaterniones que satisface dichas relaciones.

Como consecuencia del teorema de clasificación de anillos semisimples de Wedderburn, un álgebra de cuaterniones $B|_K$ es o bien un álgebra de división sobre K (es decir, todo elemento de B tiene inverso), o bien es isomorfo a un álgebra de matrices $M_2(K)$. Este resultado está demostrado en la sección 5.2 de [2].

Ejemplos (Álgebras de cuaterniones)**.**

- Álgebra de cuaterniones de Hamilton: $(-1, -1)_{\mathbb{R}}$. Es un álgebra de división.
- $M_2(K)$ es un álgebra de cuaterniones sobre K.

Si K es algebraicamente cerrado, entonces toda álgebra de cuaterniones sobre K es isomorfa a un álgebra de matrices. Si K es un cuerpo local, existe una única álgebra de cuaterniones de división sobre K a menos de isomorfismos. Por ejemplo, en el cuerpo local $K = \mathbb{R}$, la única álgebra de cuaterniones de división sobre K es H, el álgebra de cuaterniones de Hamilton.

Definición 2.2.2 (Involución canónica)**.** Toda álgebra de cuaterniones $B|_K$ está provista de un K-endomorfismo involutivo que llamaremos conjugación ($\omega \mapsto \bar{\omega}$). Si $\omega = x + yi + zj + tk$ con $x, y, z, t \in K$ entonces $\bar{\omega} = x - yi - zj - tk$. Esta involución permite definir la traza y la norma reducida como:

- $tr(\omega) = \omega + \bar{\omega} = 2x$
- $n(\omega) = \omega\bar{\omega} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$

2.2.1. Clasificación de álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{Q}$

Para estudiar un objeto matemático sobre un cuerpo de números (en particular, álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{Q}$), una buena estrategia es estudiarlo *localmente*, es decir, en cada una de las posibles completaciones de $\mathbb{Q}$. La filosofía detrás del estudio local, se basa en que en general la estructura de los objetos localmente es más sencilla y muchas veces la información global puede recuperarse de la información local a través de algún principio local-global.

De acuerdo al teorema de Ostrowski las posibles completaciones de $\mathbb{Q}$ son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ (si p es primo, a partir del valor absoluto p-ádico). Dada un álgebra de cuaterniones $B|_{\mathbb{Q}}$ consideramos sus localizaciones (la extensión de escalares en cada caso):

- $B_\infty := B \otimes \mathbb{R}$.
- $B_p := B \otimes \mathbb{Q}_p \quad p$ primo .

Llamamos lugar a $v \in \{p : p \text{ primo}\} \cup \{\infty\}$ y B_v es una localización de $B|_{\mathbb{Q}}$.

Teorema 2.2.3. *Sobre $\mathbb{Q}_p$ o $\mathbb{R}$ hay exactamente dos clases de isomorfismo de álgebras de cuaterniones.*

$$B_v \simeq \begin{cases} M_2(\mathbb{Q}_v) & \textit{(se dice que B es split en v)} \\ \textit{álgebra de división} & \textit{(se dice que B es ramificada en v)} \end{cases}$$

Definición 2.2.4 (Símbolo de Hilbert)**.** Sea $(a,b)_v := \begin{cases} +1 & \text{si } (a,b)_{\mathbb{Q}_v} \simeq M_2(\mathbb{Q}_v) \\ -1 & \text{si } (a,b)_{\mathbb{Q}_v} \text{ es de división} \end{cases}$

Teorema 2.2.5. *Sean $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces*

(i) $(a,b)_v = +1$ *para casi todo* $v \in \{p : \textit{primo}\} \cup \{\infty\}$

(ii) $\prod_v (a,b)_v = +1$ *(lo que se conoce como reciprocidad de Hilbert)*

(iii) Dado un conjunto finito y par de lugares existe una única álgebra de cuaterniones salvo isomorfismos $B|_{\mathbb{Q}}$ que ramifica exactamente en esos lugares.

Observación 2.2.6. Si dos álgebras de cuaterniones B y B' son isomorfas sobre $\mathbb{Q}$, es claro que sus localizaciones B_v y B'_v también son isomorfas ya que un isomorfismo sobre $\mathbb{Q}$ se extiende canónicamente a la extensión de escalares. El principio local-global de Hasse (afirmación (iii) del teorema anterior) afirma que vale el recíproco, es decir, dos álgebras de cuaterniones son isomorfas si y solo si ramifican en los mismos lugares.

Definición 2.2.7. Un álgebra de cuaterniones $B|_{\mathbb{Q}}$ se dice definida si B_∞ es un álgebra de división y se dice indefinida si $B_\infty \simeq M_2(\mathbb{R})$

2.2.2. Órdenes en álgebras de cuaterniones

Definición 2.2.8. Sea $B|_{\mathbb{Q}}$ un álgebra de cuaterniones. Se dice que $b \in B$ es un entero si $tr(b) \in \mathbb{Z}$ y $n(b) \in \mathbb{Z}$.

Para estudiar propiedades aritméticas del álgebra de cuaterniones uno querría considerar “el anillo de enteros de B". Empero el conjunto de enteros de B no es un subanillo; la falta de conmutatividad determina que la suma no sea cerrada en el conjunto de enteros:

Si $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $b' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, b y b' son enteros, pero $b + b'$ ni bb' son enteros.

Definición 2.2.9 (Retículo)**.** Sea $\Lambda \subset B$. Diremos que Λ es un retículo B, si es un submódulo libre finitamente generado de B.

Definición 2.2.10 (Ideal)**.** Un retículo $I \subset B$ se dice que es un ideal de B si su extensión de escalares a $\mathbb{Q}$ es isomorfa a B: $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} I \simeq B$, lo que es equivalente a decir que I es un retículo de rango máximo. Un ideal se dice entero si todos sus elementos son enteros.

Si I es un ideal de B llamaremos $n(I)$ a la norma de I definida como el único racional positivo tal que los cocientes $\frac{n(\alpha)}{n(I)}$, $\alpha \in I$ son todos enteros sin factores en común.

Definición 2.2.11 (Orden)**.** Un orden $R \subset B$ es un subanillo de B con unidad, tal que R es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango 4.

Los órdenes, son $\mathbb{Z}$-módulos libres de rango máximo en B (es decir, son ideales), que además de ser cerrados por la suma de B, son cerrados por el producto al ser subanillos. Como son subanillos finitamente generados como $\mathbb{Z}$-módulos, son enteros. Es por esto que los órdenes juegan el papel de los anillos de enteros. Consideraremos en particular a los órdenes maximales, que son aquellos órdenes de B que no están incluidos en ningún otro orden. Los órdenes maximales no son únicos. De hecho, cuando B es definida, en general hay varias clases de isomorfismo de órdenes maximales.

Definición 2.2.12 (Ideal a izquierda (o derecha) de un orden)**.** Sea R un orden maximal de B. Un ideal a izquierda de R es un retículo $I \subset B$ tal que $RI = I$. Análogamente un ideal a derecha de R es un retículo $J \subset B$ tal que $JR = J$.

Definición 2.2.13 (Orden a derecha (o izquierda) de un ideal)**.** Si I es un ideal de B, $R_d(I)$ y $R_i(I)$ serán el orden a derecha y a izquierda de I respectivamente y se definen:

$$R_d(I) := \{\alpha \in B : I\alpha \subset I\}$$
$$R_i(I) := \{\alpha \in B : \alpha I \subset I\}$$

Ambos conjuntos resultan ser órdenes. Si I es un ideal a izquierda de un orden maximal, entonces su orden a derecha también será un orden maximal.

Utilizaremos la notación ${}_{R'}I_R$ para representar un ideal I cuyo orden a izquierda es R' y su orden a derecha es R. En esta tesis trabajaremos con ideales cuyos órdenes a izquierda y derecha son maximales.

Definición 2.2.14. Sea ${}_{R'}I_R$, el conjunto $I^{-1} = \{\alpha \in B : I\alpha I \subset I\}$ es un ideal cuyo orden a derecha es R' y su orden a izquierda es R, es decir ${}_R I^{-1}{}_{R'}$.

Definición 2.2.15. Si I_1, I_2 son ideales a izquierda de R, entonces definimos

$$\mathrm{Hom}(I_1, I_2) = \{\alpha \in B : I_1\alpha \subset I_2\}$$
$$\mathrm{Hom}_{[m]}(I_1, I_2) = \left\{\alpha \in \mathrm{Hom}(I_1, I_2) : n(\alpha) = m\frac{n(I_2)}{n(I_1)}\right\}$$

Dos ideales a izquierda de R, I, J se consideran equivalentes si existe $\alpha \in B^*$ tal que $I = J\alpha$. Sea $\mathcal{I}(R)$ el conjunto de las clases de ideales a izquierda para el orden maximal R.

Proposición 2.2.16. *El conjunto $\mathcal{I}(R)$ es finito, y su cardinal no depende del orden R.*

Observación 2.2.17. El conjunto $\mathcal{I}(R) = {}^{\{R-\text{ideales a izquierda}\}}/_{B^*}$ no es un grupo como ocurre con las clases de ideales en cuerpos de números.

Sea $\{I_1, \ldots, I_n\}$ un conjunto de ideales que representa las distintas clases de ideales a izquierda de R. Podemos considerar el conjunto $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$, donde R_i es el orden a derecha de I_i para $1 \leq i \leq n$. En este conjunto $\mathcal{R}$ aparecen todas las clases de conjugación de órdenes maximales en B. Cada orden puede aparecer más de una vez, dependiendo de la cantidad de lugares donde ramifica B.

Sea el conjunto de las unidades de R_i: $R_i^\times = \{b \in R_i : b^{-1} \in R_i\} = \{b \in R_i : n(b) = \pm 1\}$. Si el álgebra de cuaterniones B es definida, entonces su forma norma es definida positiva, por lo que $R_i^\times$ es finito.

Definición 2.2.18. Si B es un álgebra de cuaterniones definida y R un orden maximal fijo. Definimos $w_i = \frac{1}{2}\#R_i^\times$.

2.3. Correspondencia de Eichler

Para esta sección consideraremos R un orden maximal fijo de un álgebra de cuaterniones B ramificada en el primo N e infinito. La estructura de la exposición está basada en la primera sección del artículo [8].

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{M}(R)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial libre generado por el conjunto $\mathcal{I}(R)$.

Los elementos de $\mathcal{M}(R)$ son combinaciones lineales formales de clases de R-ideales a izquierda con coeficientes en $\mathbb{C}$. Si $\{I_1, \ldots, I_n\}$ es un conjunto de representantes, entonces $v \in \mathcal{M}(R)$ se escribe como:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i [I_i] \quad a_i \in \mathbb{C}$$

La correspondencia de Eichler identifica espacios propios de $\mathcal{M}(R)$ con espacios propios de $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))$.

Definición 2.3.2 (Producto interno en $\mathcal{M}(R)$)**.** Se define en la base $\mathcal{I}(R)$ y se extiende bilinealmente a todo el espacio:

$$\langle [I_i], [I_j] \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ w_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

Observación 2.3.3. El producto interno definido en $\mathcal{M}(R)$ satisface en la base $\mathcal{I}(R)$:

$$\langle [I_i], [I_j] \rangle = \frac{1}{2}\#\{b \in B^\times : I_i b = I_j\} = \frac{1}{2}\#\mathrm{Hom}_{[1]}(I_i, I_j)$$

Definición 2.3.4. Sea $\tilde{\mathcal{I}}(R)$ el conjunto de los R- ideales a izquierda. Si $I \in \tilde{\mathcal{I}}(R)$ definimos

$$\mathscr{T}_m(I) = \{J \subset I : J \in \tilde{\mathcal{I}}(R);\ n(J) = m\, n(I)\}$$

$\mathscr{T}_m(I)$ es el conjunto de los subideales de I cuya norma es $m\, n(I)$, es decir, los ideales J tal que $[I : J] = m^2$. Entonces $\mathscr{T}_m(I)$ es un conjunto finito.

Observación 2.3.5. Si p es primo, $p \neq N$, entonces $\#\mathscr{T}_p(I) = p + 1$

Lema 2.3.6. $J \in \mathscr{T}_m(I) \iff mI \in \mathscr{T}_m(J)$

Definición 2.3.7. Definimos

$$\begin{aligned} t_m : \mathcal{M}(R) &\rightarrow \mathcal{M}(R) \\ [I] &\rightarrow \sum_{J \in \mathscr{T}_m(I)} [J] \end{aligned}$$

Observación 2.3.8. Si I, J son ideales a izquierda de R entonces

$$\langle [I], t_m([J]) \rangle = \frac{1}{2} \#\mathrm{Hom}_{[m]}(I, J)$$

La siguiente proposición no es difícil de demostrar trabajando con ideales y órdenes localmente.

Proposición 2.3.9. *El operador t_m verifica las siguientes propiedades:*

1. *t_m es autoadjunto*
2. *Si $(m, m') = 1$, entonces $t_{mm'} = t_m t_{m'}$*
3. *Si p es primo, tal que B no ramifica en p entonces $t_{p^{k+2}} = t_{p^k} t_p - p t_{p^k}$*
4. *Si p es un primo ramificado para B entonces $t_{p^k} = (t_p)^k$*

Estas propiedades se corresponden que con las que satisfacen los operadores de Hecke en el espacio de formas modulares (proposición 2.1.7).

Proposición 2.3.10. *El espacio $\mathcal{M}(R)$ se descompone en espacios propios comunes a todos los operadores. Cuando el orden R es maximal, estos espacios propios tienen dimensión 1.*

Sea R es un orden maximal del álgebra de cuaterniones B ramificada en $\{N, \infty\}$.

Teorema 2.3.11 (Eichler). *La traza de t_m en $\mathcal{M}(R)$ coincide con la traza de T_m en $\mathcal{M}_2(N)$ para todo $m \geq 0$.*

Corolario. *Los espacios $\mathcal{M}(R)$ y $M_2(\Gamma_0(N))$ son isomorfos como Hecke módulos. Los vectores propios de $\mathcal{M}(R)$ se corresponden con formas propias en $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))$ con los mismos valores propios, pero el isomorfismo no es canónico.*

Definición 2.3.12. Definimos la forma bilineal

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}(R) \times \mathcal{M}(R) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N)) \\ (u, v) &\mapsto \sum_{m \geq 0} \langle u, t_m v \rangle q^m \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observación 2.3.13. Para ver que la definición anterior es correcta, basta observar que si $[I], [J] \in \mathcal{I}(R)$ y M es el retículo de dimensión 4 definido como $M = J^{-1}I$ entonces $\phi([I], [J]) = \theta_M(z) = \sum_{m \in M} q^{n(m)/n(M)}$. Resulta que $\theta_M(z)$ es una forma modular de peso 2 para $\Gamma_0(N)$. Además,

$$\phi(t_m u, v) = \phi(u, t_m v) = T_m \phi(u, v) \tag{2.3}$$

Como la forma bilineal definida en 2.2 resulta ser no degenerada, entonces induce isomorfismos que no serán canónicos. Fijado $v \in \mathcal{M}(R)$ el mapa

$$\begin{aligned} \phi(v, \cdot) : \mathcal{M}(R) &\to \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N)) \\ w &\mapsto \phi(v, w) \end{aligned}$$

es una transformación Hecke lineal, pero que no necesariamente es isomorfismo. Como la forma bilineal ϕ es no degenerada, existe $v \in \mathcal{M}(R)$ tal que $\phi(v, \cdot)$ es un isomorfismo. Esta transformación $\phi(v, \cdot)$ realiza la correspondencia de Eichler. Al no existir una elección canónica para v, el isomorfismo no es canónico.

Capítulo 3

Fórmula de Gross

3.1. Puntos especiales de discriminante $-D$

3.1.1. Inmersiones de cuerpos cuadráticos en álgebras de cuaterniones

Definición 3.1.1. Sea $-D \in \mathbb{Z}$ un discriminante fundamental y K el cuerpo cuadrático de discriminante $-D$. Una inmersión $f : K \to B$ es un morfismo de anillos inyectivo.

(La notación con el signo negativo por ahora es innecesaria pero luego consideraremos únicamente discriminantes negativos).

La existencia de inmersiones de cuerpos cuadráticos en álgebras de cuaterniones está relacionado con si ciertos números son representados por determinadas formas cuadráticas. Los resultados que utilizaremos están demostrados en el capítulo 2 de [4] y son los siguientes:

Proposición 3.1.2. *Existe una inmersión $f : K \to B$ si y solo si para todo p donde B ramifica ocurre que $\left(\frac{-D}{p}\right) \neq 1$.*

Proposición 3.1.3. *No hay inmersiones de cuerpos cuadráticos reales en álgebras de cuaterniones definidas.*

Definición 3.1.4. Sean $\Lambda \subset K$ un orden cuadrático y $R \subset B$ un orden del álgebra de cuaterniones. Una inmersión $f : K \to B$ se dice que es una inmersión del orden cuadrático Λ en el orden de cuaterniones R si $f(\Lambda) \subseteq R$

Definición 3.1.5. Sean Λ y R órdenes de K y B respectivamente. Una inmersión de Λ a R

$$\begin{aligned} f : K &\to B \\ \Lambda &\to R \end{aligned}$$

se dice optimal si $f(K) \cap R = f(\Lambda)$

En las inmersiones optimales que estudiaremos en esta tesis R será un orden maximal de B y Λ será el anillo de enteros de un cuerpo cuadrático de discriminante $-D$.

3.1.2. Definición de los puntos especiales

Sea B un álgebra de cuaterniones y R un orden maximal fijo. Consideramos fijo un conjunto de representantes de R-ideales a izquierda $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ y sus respectivos órdenes a derecha $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$. De este punto en adelante, K será un cuerpo cuadrático imaginario de discriminante $-D$ y $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros.

Definición 3.1.6. Un punto especial de discriminante $-D$ será un par $x = (I, f)$ donde I es un ideal a izquierda para R y $f : K \to B$ es una inmersión optimal de $\mathcal{O}_K$ en $R_d(I)$. Identificamos estos pares módulo la acción de B^*, de forma tal que $x = (I, f)$ y $x' = (I\alpha, \alpha^{-1} f \alpha)$ representan al mismo punto especial de discriminante $-D$.

Llamaremos X_D al conjunto de puntos especiales de discriminante $-D$.

Observación 3.1.7. Si $f : K \to B$ es una inmersión optimal de $\mathcal{O}_K$ en $R_d(I)$ ($f(\mathcal{O}_K) \subseteq R_d(I)$), entonces $\alpha^{-1} f \alpha : K \to B$ es también una inmersión optimal de $\mathcal{O}_K$ en $R_d(I\alpha)$ (es decir, $\alpha^{-1} f \alpha(\mathcal{O}_K) \subseteq R_d(I\alpha)$).

Demostración.

$$\begin{aligned} f(K) \cap R_d(I) = f(\mathcal{O}_K) &\iff \alpha^{-1}(f(K) \cap R_d(I))\alpha = \alpha^{-1} f(\mathcal{O}_K)\alpha \\ &\iff \alpha^{-1} f(K)\alpha \cap \alpha^{-1} R_d(I)\alpha = \alpha^{-1} f(\mathcal{O}_K)\alpha \\ &\iff \alpha^{-1} f\alpha(K) \cap \alpha^{-1} R_d(I)\alpha = \alpha^{-1} f\alpha(\mathcal{O}_K) \end{aligned}$$

Basta ver entonces que $\alpha^{-1} R_d(I)\alpha = R_d(I\alpha)$.

$$\begin{aligned} R_d(I\alpha) &= \{\beta \in B : I\alpha\beta \subset I\alpha\} \\ &= \{\beta \in B : I\alpha\beta\alpha^{-1} \subset I\} \\ &= \{\alpha^{-1}\gamma\alpha \in B : I\gamma \subset I\} = \alpha^{-1} R_d(I)\alpha \end{aligned}$$

□

Definición 3.1.8. Si $x = (I, f)$ es un punto especial de discriminante $-D$. Notaremos $[x]$ a la clase de I como R-ideal de B.

Es claro la definición de $[x]$ no depende del representante de x ya que $[I\alpha] = [I]$ para todo $\alpha \in B^*$.

El producto interno en $\mathcal{M}(R)$, definido en 2.3.2, permite definir la altura de un punto especial de la siguiente manera:

Definición 3.1.9. Si $x = (I, f)$ es un punto especial de discriminante $-D$, la altura de x será

$$\langle x, x \rangle := \langle [x], [x] \rangle = \langle [I], [I] \rangle$$

3.1.3. Acción de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ en los puntos especiales

Definición 3.1.10. Sea $x = (I, f)$ un punto especial de discriminante $-D$. Definiremos la acción de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ en X_D tal que si $\mathcal{A}$ es una clase de ideales en $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ y $\mathfrak{a}$ es un ideal en $\mathcal{A}$, $x_{\mathcal{A}} = (If(\mathfrak{a}), f)$.

Observación 3.1.11. Para verificar que la acción definida sobre el conjunto de puntos especiales de discriminante $-D$ es correcta, hace falta ver que la acción no depende del representante de x, ni de la elección de $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$; y que si x es un punto especial de discriminante $-D$, entonces $x_{\mathcal{A}} = (If(\mathfrak{a}), f)$ también lo es.

Demostración. Sean x y x' representantes del mismo punto especial de discriminante $-D$, entonces $x = (I, f)$ y $x' = (I\alpha, \alpha^{-1}f\alpha)$ para algún $\alpha \in B^*$. Entonces, si $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$

$$x'_{\mathcal{A}} = (I\alpha(\alpha^{-1}f(\mathfrak{a})\alpha), \alpha^{-1}f\alpha) = (If(\mathfrak{a})\alpha, \alpha^{-1}f\alpha) = (If(\mathfrak{a}), f) = x_{\mathcal{A}}$$

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}$. Entonces existe $\lambda \in \mathcal{O}^*$ tal que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\lambda)$. Como $\mathfrak{a}$ es un ideal y (λ) es un ideal principal, entonces $\mathfrak{a}(\lambda) = \mathfrak{a}K\lambda = \mathfrak{a}\lambda$ entonces,

$$(If(\mathfrak{b}), f) = (If(\mathfrak{a}\lambda), f) = (If(\mathfrak{a})f(\lambda), f) = (If(\mathfrak{a}), f(\lambda)\, f\, f(\lambda)^{-1}) = I(f(\mathfrak{a}), f)$$

La última igualdad se verifica debido a que la imagen de f es conmutativa en B porque K es conmutativo.

Para verificar que $x_{\mathfrak{a}}$ es un punto especial de discriminante $-D$ primero observamos que $If(\mathfrak{a})$ es un ideal a izquierda para R. Como $\mathfrak{a}$ es un ideal en un orden cuadrático $f(\mathfrak{a})$ es un retículo de dimensión 2 en B. A su vez, I es un retículo de dimensión 4 en B, entonces $If(\mathfrak{a})$ es un retículo de dimensión 4. Además $RI = I$, entonces $RIf(\mathfrak{a}) = If(\mathfrak{a})$.

Entonces basta observar que $f(K) \cap R_d(If(\mathfrak{a})) = f(\mathcal{O}_K)$. De forma análoga a la observación anterior $R_d(If(\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{a})^{-1}R_d(I)f(\mathfrak{a})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f(K) \cap R_d(If(\mathfrak{a})) &= f(K) \cap f(\mathfrak{a})^{-1}R_d(I)f(\mathfrak{a}) \\
&\overset{*}{=} f(\mathfrak{a})^{-1}f(K)f(\mathfrak{a}) \cap f(\mathfrak{a})^{-1}R_d(I)f(\mathfrak{a}) \\
&= f(\mathfrak{a})^{-1}(f(K) \cap R_d(I))f(\mathfrak{a}) \\
&= f(\mathfrak{a})^{-1}f(\mathcal{O}_K)f(\mathfrak{a}) \\
&\overset{*}{=} f(\mathcal{O}_K)
\end{aligned}$$

Las igualdades $*$ se deben a que el producto de B es conmutativo en la imagen de f, ya que K es conmutativo y f es un morfismo de anillos.

Por último observamos que $If(\mathfrak{a})$ es un R-ideal a izquierda y por lo tanto está representado por algún $I_j \in \{I_1 \dots I_n\}$, es decir $I_j = If(\mathfrak{a})\alpha$ para algún $\alpha \in B^*$, entonces $x_{\mathfrak{a}} = (If(\mathfrak{a}), f) = (If(\mathfrak{a})\alpha, \alpha^{-1}f\alpha) = (I_j, \alpha^{-1}f\alpha)$ donde $\alpha^{-1}f\alpha : \mathcal{O}_K \to R_j$ es una inmersión optimal. □

3.2. Valores especiales de L- series

3.2.1. Series theta asociadas a cuerpos cuadráticos imaginarios

Sea K es un cuerpo cuadrático imaginario de discriminante $-D$ como antes, y $\mathcal{N}$ la norma en el cuerpo. Sea $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros. Llamaremos $u(-D) = u$ el cardinal de $\mathcal{O}_K^\times / \langle \pm 1 \rangle$. Ocurre que $u(-3) = 2$, $u(-4) = 2$ y en el restos de los casos $u(-D) = 1$. Sea $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ el grupo de clases de ideales de $\mathcal{O}_K$ y $h(-D) = h$ su cardinal. Si $\mathcal{B}$ es una clase de ideales de $\mathcal{O}_K$ definimos su serie theta:

Definición 3.2.1 (Serie theta asociada a $\mathcal{B}$)**.** Sea $\mathfrak{b}$ un ideal fijo en la clase $\mathcal{B}$, definimos la serie theta asociada a $\mathcal{B}$ de la siguiente manera:

$$E_{\mathcal{B}}(z) = \frac{1}{2u} \sum_{\lambda \in \mathfrak{b}} q^{\mathcal{N}\lambda/\mathcal{N}\mathfrak{b}} = \sum_{m=0}^{\infty} r_{\mathcal{B}}(m) q^m \qquad (q = e^{2\pi i z}) \tag{3.1}$$

Teorema 3.2.2 (Hecke)**.** *$E_{\mathcal{B}}$ es una forma modular de peso 1 para $\Gamma_0(D)$, con carácter ϵ, donde ϵ es el carácter de Dirichlet asociado a K, es decir, definido en $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^{\times}$ y extendido a $\mathbb{Z}$ tal que*

$$\epsilon(p) = \begin{cases} \left(\frac{-D}{p}\right) & \text{si } (-D, p) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Proposición 3.2.3. *Para $m = 0$, $r_{\mathcal{B}}(0) = \frac{1}{2u}$; y para $m \geq 1$, ocurre que $r_{\mathcal{B}}(m)$ coincide con la cantidad de ideales enteros de norma m en la clase $\mathcal{B}$.*

Demostración. El caso $m = 0$ resulta de que la norma es definida, y el elemento 0 pertenece a todos los ideales.

Si $m \geq 1$, de la definición de $r_{\mathcal{B}}(m)$ sabemos que $2u\, r_{\mathcal{B}}(m)$ es la cantidad de $\lambda \in \mathfrak{b}$ tal que $\mathcal{N}(\lambda) = m\mathcal{N}\mathfrak{b}$. Entonces, para cada $\lambda \in \mathfrak{b}$ tal que $\mathcal{N}(\lambda) = m\mathcal{N}\mathfrak{b}$, el ideal $(\lambda)\mathfrak{b}^{-1}$ es un ideal de $\mathcal{O}_K$ en la clase $\mathcal{B}^{-1}$ y $\mathcal{N}((\lambda)\mathfrak{b}^{-1}) = m$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ es un ideal en la clase $\mathcal{B}^{-1}$ con $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = m$, entonces $\mathfrak{ab}$ es un ideal principal, es decir $\mathfrak{ab} = (\lambda)$ donde $\lambda \in \mathfrak{b}$. Además $\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}(\mathfrak{a})\mathcal{N}(\mathfrak{b}) = m\mathcal{N}(\mathfrak{b})$.

Esto da la siguiente biyección:

$$\{\lambda \in \mathfrak{b} : \mathcal{N}(\lambda) = m\mathcal{N}\mathfrak{b}\}/\mathcal{O}_K^{\times} \leftrightarrow \{\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \in \mathcal{B}^{-1}, \mathcal{N}\mathfrak{a} = m\}$$

A su vez, el mapa $\mathfrak{b} \mapsto \bar{\mathfrak{b}}$ donde $\bar{\mathfrak{b}}$ es el complejo conjugado de $\mathfrak{b}$ realiza la siguiente biyección:

$$\{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \in \mathcal{B}, \mathcal{N}\mathfrak{b} = m\} \leftrightarrow \{\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \in \mathcal{B}^{-1}, \mathcal{N}\mathfrak{a} = m\}$$

□

Definición 3.2.4. Definimos la serie de Einsenstein

$$E(z) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} E_{\mathcal{B}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} R(m) q^m \tag{3.2}$$

Es claro que $R(0) = \frac{h}{2u}$, y de acuerdo a la proposición anterior y si $m \geq 1$, $R(m)$ es la cantidad de ideales de $\mathcal{O}_K$ de norma m.

3.2.2. L-series de Rankin

Sea $\mathcal{A}$ es una clase de ideales de $\mathcal{O}_K$, y f es una forma cuspidal para $\Gamma_0(N)$, tal que N es coprimo con D. En esta sección se define la L-serie de Rankin $L_{\mathcal{A}}(f, s)$. Estas L-series de Rankin son el producto de la L-serie de Dirichlet asociada al cuerpo K, con la convolución de la L-serie asociada a f, y la L-serie asociada a la serie theta $E_{\mathcal{A}}$ definida en 3.2.1.

Definición 3.2.5 (L-series de formas modulares)**.** Sea $f \in S_2^{new}(\Gamma_0(N))$. Si la expansión de Fourier de f es

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

definimos su L-serie de Hecke como

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Definición 3.2.6 (L-series de Rankin)**.** Definimos las L-series de Rankin $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ como el producto de la L-serie de Dirichlet

$$L^{(N)}(2s-1,\epsilon) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}}$$

y la convolución de $L(f,s)$ con la serie de Dirichlet $\sum_{m>0} r_{\mathcal{A}}(m)m^{-s}$, obteniendo:

$$L_{\mathcal{A}}(f,s) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s}$$

El siguiente teorema se demuestra en [6]:

Teorema 3.2.7. *Si N y D son coprimos, la L-serie $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ se extiende analíticamente a todo el plano complejo, y satisface la siguiente ecuación funcional:*

$$L_{\mathcal{A}}^*(f,s) := \left(\frac{DN}{4\pi^2}\right)^s \Gamma(s) L_{\mathcal{A}}(f,s) = -\epsilon(N) L_{\mathcal{A}}^*(f,2-s)$$

3.2.3. Valores especiales de L-series de Rankin

Una motivación para estudiar las L-series de Rankin es su relación con L-series de curvas elípticas. Si χ es un carácter en $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ se define

$$L_K(f,\chi,s) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} \chi(\mathcal{A}) L_{\mathcal{A}}(f,s)$$

En particular, cuando $\chi = 1$ se tiene la siguiente descomposición:

$$L_K(f,\chi,1) = L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1) \tag{3.3}$$

donde $f \otimes \epsilon = \sum_{m \geq 1} a_m \epsilon(m) q^m$ es el *twist* de f por ϵ. Si N y D son coprimos tiene peso 2 y nivel ND^2.

Si $L(f,s)$ resulta ser la L-serie asociada a una curva elíptica modular, la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (en su versión débil) dice que el orden de anulación de $L(f,s)$ en $s = 1$ coincide con el rango de la curva elíptica.

De hecho Gross y Zagier en [6] muestran cómo construir un punto racional de orden infinito en la curva elíptica, si $L(f,s)$ tiene un cero simple en $s = 1$.

La ecuación funcional de $L_{\mathcal{A}}$ en $s = 1$ es $L^*_{\mathcal{A}}(f,1) = \left(\frac{DN}{4\pi^2}\right)^2 L_{\mathcal{A}}(f,1) = -\epsilon(N)L^*_{\mathcal{A}}(f,1)$. Cuando $\epsilon(N) = +1$, el valor central $L_{\mathcal{A}}(f,1)$ se anula trivialmente. En este caso Gross y Zagier estudiaron el valor de la derivada $L'_{\mathcal{A}}(f,1)$.

En el caso $\epsilon(N) = -1$ Gross da una forma de calcular $L_{\mathcal{A}}(f,1)$ contando inmersiones de cuerpos cuadráticos en álgebras de cuaterniones. En esta fórmula, que se detalla en la siguiente sección, se centra este trabajo.

3.3. Fórmula de Gross

La fórmula de Gross expresa el valor de $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ en $s = 1$ en función de las alturas de puntos especiales de discriminante $-D$.

Sea x un punto fijo de discriminante $-D$, definimos la forma modular $G_{\mathcal{A}}$ construida a partir de la acción de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ sobre x.

Definición 3.3.1.

$$G_{\mathcal{A}} = \sum_{\mathcal{B}\in\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} \phi([x_{\mathcal{B}}],[x_{\mathcal{B}\mathcal{A}}]) \tag{3.4}$$

Teorema 3.3.2 (Fórmula de Gross)**.**

$$L_{\mathcal{A}}(f,1) = \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}}(f,G_{\mathcal{A}})_{\Gamma_0(N)} \tag{3.5}$$

El próximo capítulo demuestra este teorema, en el caso en que D y N son primos impares y distintos.

3.3.1. Corolarios de la fórmula de Gross

La fórmula de Gross expresa el valor central $L_{\mathcal{A}}(f,1)$ en función del producto interno de f con cierta forma modular $G_{\mathcal{A}}$ construida a partir de inmersiones del cuerpo cuadrático de discriminante $-D$ en el álgebra de cuaterniones ramificada en $\{N,\infty\}$, y la correspondencia de Eichler.

De acuerdo a la descomposición (3.3), calcular los valores centrales de las L-series $L_{\mathcal{A}}$ permite calcular $L(f,1)L(f\otimes\epsilon,1)$ donde ϵ es el carácter de Dirichlet asociado al cuerpo cuadrático de discriminante $-D$.

La idea de esta sección es trabajar con la fórmula de Gross de forma tal de obtener una fórmula para calcular $L(f,1)L(f\otimes\epsilon,1)$, y en particular para decidir si el valor es 0 o no.

En esta sección consideraremos la forma cuspidal f normalizada tal que $f(z) = q + \sum_{n>1}^{\infty} a_n q^n$ y definiremos $G_D = \sum_{\mathcal{A}\in\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} G_{\mathcal{A}}$. De acuerdo a la descomposición (3.3) y a la fórmula de Gross (3.5) se tiene que:

$$L(f,1)L(f\otimes\epsilon,1) = \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}}(f,G_D)_{\Gamma_0(N)}$$

Proposición 3.3.3. *Se cumple que* $G_D = \phi(e_D, e_D)$ *donde* $e_D := \sum_{\mathcal{A}} [x_{\mathcal{A}}] \in \mathcal{M}(R)$.

Demostración. Fijado $\mathcal{B}$, la estructura de grupo de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ garantiza que $\mathcal{AB}$ variando $\mathcal{A}$ recorre todas las clases de ideales exactamente una vez, entonces

$$G_D = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{B}} \phi([x_{\mathcal{B}}], [x_{\mathcal{AB}}]) = \sum_{\mathcal{B}} \sum_{\mathcal{A}} \phi([x_{\mathcal{B}}], [x_{\mathcal{AB}}]) = \sum_{\mathcal{B}} \phi([x_{\mathcal{B}}], e_D) = \phi(e_D, e_D)$$

□

Como f es un vector propio de $\mathcal{S}(\Gamma_0(N))$, podemos considerar una base ortonormal de vectores propios donde uno de los elementos sea f. Si $g \in \mathcal{S}(\Gamma_0(N))$ la componente f-isotípica de g es la componente de g donde los operadores de Hecke actúan como en f, es decir, la componente correspondiente al espacio propio de f. Al ser $\mathcal{S}(\Gamma_0(N))$ diagonalizable en una base ortonormal y los valores propios todos distintos, la componente f-isotípica será la proyección ortogonal sobre $\langle f \rangle$ y la escribiremos $g^{(f)}$. Como $\mathcal{M}(R)$ es un Hecke módulo isomorfo a $S(\Gamma_0(N))$, también podemos considerar $e^{(f)}$ la componente f-isotípica de un elemento $e \in \mathcal{M}(R)$.

De acuerdo a la correspondencia de Eichler podemos considerar un vector propio $e_f \in \mathcal{M}(R)$ tal que $\phi(e_f, e_f) = \langle e_f, e_f \rangle f$ y una base ortonormal de $\mathcal{M}(R)$ donde uno de los elementos de la base es e_f.

Observación 3.3.4. Debido a la Hecke-bilinealidad de ϕ (ecuación 2.3) ocurre que $G_D^{(f)} = \phi(e_D^{(f)}, e_D^{(f)}) = \langle e_D^{(f)}, e_D^{(f)} \rangle f$, donde $e_D^{(f)} = \dfrac{\langle e_D, e_f \rangle}{\langle e_f, e_f \rangle} e_f$ es la componente f isotípica de e_D.

Teorema 3.3.5.

$$L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1) = \frac{8\pi^2 (f,f)}{u^2 \sqrt{D}} \langle e_D^{(f)}, e_D^{(f)} \rangle$$

Demostración.

$$\begin{aligned} L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1) &= \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}} (f, G_D) = \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}} (f, G_D^{(f)}) \\ &= \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}} (f, \phi(e_D^{(f)}, e_D^{(f)})) \\ &= \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}} (f,f) \langle e_D^{(f)}, e_D^{(f)} \rangle \end{aligned}$$

□

Esta identidad está relacionada con formas modulares de peso 3/2 en $\Gamma_0(4N)$.

Formas modulares de peso 3/2

Definición 3.3.6. Una forma modular de peso 3/2 para $\Gamma_0(4N)$ es una función del semiplano superior $g(z)$ que es regular en las cúspides y satisface:

$$\frac{g(z)}{\Theta(z)^3} \text{ es invariante bajo } \Gamma_0(4N) \tag{3.6}$$

donde $\Theta(z) = \sum q^{n^2}$ es la serie theta estándar de peso 1/2.

Sobre el espacio de formas modulares de peso 3/2 Shimura define el álgebra de operadores de Hecke T^* y demuestra que satisface la siguiente propiedad que se conoce como correspondencia de Shimura [9]:

$$\text{Dado } g \in \mathcal{M}_{3/2}(\Gamma_0(4N)) \text{ tal que } T^*_{p^2} g = \lambda_p g \text{ para todo } p,$$
$$\text{existe } f \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N')) \text{ tal que } T_p(f) = \lambda_p f.$$

Dentro de $\mathcal{M}_{3/2}(\Gamma_0(4N))$ consideramos el subespacio de Kohnen $\mathcal{M}^*(\Gamma_0(4N))$ compuesto por las formas $g(z) = \sum_{D \geq 0} a_D q^D$ tal que

$$a_i(D) = 0 \quad \text{si} \quad -D \not\equiv 0, 1 \pmod 4 \quad \text{o si } \left(\tfrac{-D}{N}\right) = 1 \tag{3.7}$$

Kohnen demuestra que si N es libre de cuadrados y m es coprimo con $4N$ entonces el espacio $\mathcal{M}^{*^{new}}(\Gamma_0(4N))$ con la acción de los operadores $\{T_{m^2}\}$ es isomorfo como Hecke módulo a $\mathcal{M}_2^{new}(\Gamma_0(N))$ con la acción de los operadores $\{T_m\}$.

Una forma de construir algunas de estas formas modulares de peso 3/2 es a través de la serie theta que consiste en contar puntos de un retículos de dimensión 3. Sea R_i un orden maximal de B. Definimos $S_i = \mathbb{Z} + 2R_i$ y S_i^0 el subgrupo de de elementos con traza 0 en S_i. Entonces S_i^0 es un retículo de rango 3 sobre $\mathbb{Z}$.

Sea Θ_i la serie theta de la forma norma en el retículo S_i^0:

$$\Theta_i(z) = \frac{1}{2} \sum_{b \in S_i^0} q^{n(b)} = \frac{1}{2} + \sum_{D > 0} a_i(D) q^D$$

Proposición 3.3.7. *Si R_i es un orden maximal de B, entonces $\Theta_i \in \mathcal{M}^*(\Gamma_0(4N))$.*

La proposición 3.3.7 justifica la definición del siguiente mapa lineal que relaciona los espacios $\mathcal{M}(R)$ y $\mathcal{M}^*(\Gamma_0(4N))$:

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{M}(R) &\to \mathcal{M}^*(\Gamma_0(4N)) \\ e_i &\mapsto \Theta_i = \frac{1}{2} + \sum \langle e_i, e_D \rangle q^D \end{aligned}$$

donde $\Theta(t_m e) = T_{m^2}(\Theta(e))$ para todo $e \in \mathcal{M}(R)$ (proposición 13.3 en [5]).

Sea $e_f \in \mathcal{M}(R)$ como antes: $\phi(e_f, e_f) = \langle e_f, e_f \rangle f$. Llamaremos m_D a los coeficientes de la forma modular de peso 3/2:

$$\Theta(e_f) = \sum m_D q^D$$

El siguiente resultado se debe a Waldspurger y muestra como se comportan los valores especiales de twists en función del discriminante $-D$.

Proposición 3.3.8 (Fórmula de Waldspurger)**.** *Sean N y D primos distintos tal que $-D \equiv 1 \pmod 4$ y $\left(\frac{-D}{N}\right) = -1$. Entonces*

$$L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1) = \frac{8\pi^2 (f,f)}{u^2 \sqrt{D}} \frac{m_D^2}{\langle e_f, e_f \rangle} \tag{3.8}$$

Demostración. A partir del teorema 3.3.5 basta probar que $\langle e_D^{(f)}, e_D^{(f)} \rangle = \frac{m_D^2}{\langle e_f, e_f \rangle}$.

Por definición $m_D = \langle e_f, e_D \rangle = \langle e_f, e_D^{(f)} \rangle$ entonces

$$e_D^{(f)} = \frac{m_D^2}{\langle e_f, e_f \rangle} e_f$$

□

De esta forma se logra expresar $L(f,1)L(f \otimes \epsilon, 1) = k_f m_D^2$ donde k_f es una constante trascendente no nula (si $f \neq 0$) que depende de f y D.

Por otro lado $m_D = \langle e_f, e_D \rangle$, donde e_f es un vector propio para los operadores de Hecke $\{t_m\}$ en $\mathcal{M}(R)$ que sobre la base $\{e_1, \ldots e_n\}$ están definidos con coeficientes enteros. Entonces los coeficientes de e_f en la base $\{e_1, \ldots e_n\}$ son enteros algebraicos y por lo tanto, los valores de m_D tienen denominadores acotados en el cuerpo (dependiendo de los coeficientes de e_D en la base canónica). Entonces es posible determinar computacionalmente si los m_D se anulan o no en cada caso, y por lo tanto si el producto de las L-series se anula o no.

Capítulo 4

Demostración de la fórmula de Gross

4.1. Método de Rankin

El método de Rankin fue desarrollado independientemente por Rankin en 1939 y por Selberg en 1940. En este contexto, consiste en expresar la convolución de L-series de dos formas modulares como un producto de Petersson que involucra series de Einsenstein. Esta sección está basada en el capítulo IV del artículo [6].

La primera parte del método de Rankin consiste en escribir la L-serie $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ en forma integral.

Para $Re(s)$ suficientemente grande tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} &= \left(\int_0^{\infty} e^{-y} y^s \frac{dy}{y}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-y}\left(\frac{y}{m}\right)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m)\frac{dy}{y}\end{aligned}$$

El término $\int_0^{\infty} e^{-y}\left(\frac{y}{m}\right)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m)\frac{dy}{y}$ coincide con la tranformada de Mellin de la función de y $e^{-y}\left(\frac{1}{m}\right)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m)$. En particular, la transformada de Mellin es integrar la función contra el núcleo y^s con respecto a la medida multiplicativa de Haar $\frac{dy}{y}$, lo que la hace invariante con respecto a la multiplicación escalar. Entonces si consideramos $y \mapsto 4\pi m y$:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-4\pi m y} y^s (4\pi)^s a_m r_{\mathcal{A}}(m)\frac{dy}{y}\\ &= (4\pi)^s\int_0^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m r_{\mathcal{A}}(m) e^{-4\pi m y}\right) y^s\frac{dy}{y}\end{aligned}$$

Si $z = x+iy$, entonces $\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} = \sum_{m=1}^{\infty} r_{\mathcal{A}}(m)e^{-2\pi i m x}e^{-2\pi m y}$, y $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi i m x}e^{-2\pi m y}$

entonces, como $\int_0^1 e^{2\pi imx}dx = 0$ para $m \neq 0$ ocurre que

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m r_{\mathcal{A}}(m) e^{-4\pi my} = \int_0^1 f(x+iy)\overline{E_{\mathcal{A}}(x+iy)}dx$$

obteniéndose entonces la siguiente igualdad:

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s} = \int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(x+iy)\overline{E_{\mathcal{A}}(x+iy)}dx\right)y^s\frac{dy}{y}$$

Sea $\Gamma_\infty = \left\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1 & n\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\right\}$. El dominio fundamental de la acción de Γ_∞ en $\mathbb{H}$ es justamente $\{x+iy : x \in [0,1]; y \in (0,+\infty)\}$ entonces la integral anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(x+iy)\overline{E_{\mathcal{A}}(x+iy)}dx\right)y^s\frac{dy}{y} &= \iint_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}y^{s+1}\frac{dxdy}{y^2}\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)}\iint_{\gamma F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}y^{s+1}\frac{dxdy}{y^2}
\end{aligned}$$

donde F_{ND} es un dominio fundamental para la acción de $\Gamma_0(ND)$ en $\mathbb{H}$.

Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}* & *\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(ND)$ ocurre que:

$$\begin{aligned}
f(\gamma z) &= (cz+d)^2 f(z)\\
\overline{E_{\mathcal{A}}(\gamma z)} &= \epsilon(d)(c\bar{z}+d)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}\\
\mathrm{Im}(\gamma z) &= \frac{y}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

Utilizando que la medida de Haar para la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ es $\frac{dxdy}{y^2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s}\\
= &\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)}\iint_{F_{ND}} f(\gamma z)\overline{E_{\mathcal{A}}(\gamma z)}\mathrm{Im}(\gamma z)^{s+1}\frac{dxdy}{y^2}\\
= &\sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)}\iint_{F_{ND}} f(z)(cz+d)^2\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}(c\bar{z}+d)\epsilon(d)\frac{y^{s+1}}{|cz+d|^{2s+2}}\frac{dxdy}{y^2}\\
= &\sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)}\iint_{F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)}\frac{\epsilon(d)}{c\bar{z}+d}\frac{y^{s-1}}{|cz+d|^{2s-2}}dxdy
\end{aligned}$$

Definición 4.1.1. Para $M \geq 1$ definimos la serie de Eiseinstein $E_{MD}(s,z)$ de peso 1, nivel MD, y carácter ϵ:

$$E_{MD}(s,z) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ (m,M)=1}}\frac{\epsilon(m)}{m^{2s+1}}\sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(MD)}\frac{\epsilon(d)}{cz+d}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&(4\pi)^{-s}\Gamma(s) \sum_{\substack{m\geq 1\\(m,M)=1}} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m r_{\mathcal{A}}(m)}{m^s}\\
= &\iint_{F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon(m)}{m^{2s-1}} \sum_{\gamma=\pm\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(ND)} \frac{\epsilon(d)}{c\bar{z}+d}\frac{y^{s-1}}{|cz+d|^{2s-2}}dxdy
\end{aligned}
$$

Entonces probamos:

$$
\begin{aligned}
(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{\mathcal{A}}(f,s) &= \iint_{F_{ND}} f(z)\overline{E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(\bar{s}-1,z)}dxdy\\
&= (f, E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(\bar{s}-1,z))_{\Gamma_0(ND)}
\end{aligned}
$$

De esta forma, el método de Rankin logra expresar $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ en función de un producto de Petersson en $\Gamma_0(ND)$.

El próximo paso consiste en expresarlo como un producto de Petersson en $\Gamma_0(N)$, para ello se utiliza el operador traza que se define a continuación.

Definición 4.1.2. Si g es una forma modular de peso 2 y nivel ND, definimos

$$
\mathrm{Tr}_N^{ND}\{g\} = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)} g|_2\gamma
$$

donde para $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, $(g|_2\gamma)(z) = (\det\gamma)(cz+d)^{-2}g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$.

Proposición 4.1.3. *$Tr_N^{ND}\{g\}$ es una forma modular de peso 2 y nivel N.*

Proposición 4.1.4. $(f,g)_{\Gamma_0(ND)} = (f, Tr_N^{ND}\{g\})_{\Gamma_0(N)}$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(f,g)_{\Gamma_0(ND)} &= \iint_{F_{ND}} f(z)\overline{g(z)}y^2\frac{dxdy}{y^2}\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)} \iint_{F_{\gamma N}} f(z)\overline{g(z)}y^2\frac{dxdy}{y^2}\\
&= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)\\ \gamma=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)}} \iint_{F_N} f(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}\frac{y^2}{|cz+d|^4}\frac{dxdy}{y^2}\\
&= \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)\\ \gamma=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)}} \iint_{F_N} f(\gamma z)(cz+d)^{-2}\overline{g(\gamma z)(cz+d)^{-2}}dxdy\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)} \iint_{F_N} f(z)\overline{(g|_2\gamma)(z)}dxdy\\
&= \iint_{F_N} f(z)\overline{(\mathrm{Tr}_N^{ND}\{g\})(z)}dxdy\\
&= (f, \mathrm{Tr}_N^{ND}\{g\})_{\Gamma_0(N)}
\end{aligned}
$$

□

El desarrollo anterior demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.5.

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L_{\mathcal{A}}(f,s) = (f, Tr_N^{ND}\{E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(\bar{s}-1,z)\})_{\Gamma_0(N)}$$

El teorema 4.1.5 implica la siguiente igualdad para el valor central $L_{\mathcal{A}}(f,1)$:

$$L_{\mathcal{A}}(f,1) = 4\pi(f, \mathrm{Tr}_N^{ND}\{E_{\mathcal{A}}(z)E_{ND}(0,z)\})_{\Gamma_0(N)}$$

Para calcular la traza, Gross y Zagier expresan $E_{ND}(s,z)$ en términos de la serie de Einsenstein no holomorfa de peso 1 y nivel D definida como:

$$E_D(s,z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ c\equiv 0(D)}} \frac{\epsilon(d)}{(cz+d)}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$$

Proposición 4.1.6. *En $s=0$, se cumple la siguiente identidad:*

$$E_{ND}(0,z) = E_D(0,Nz) + N^{-1}E_D(0,z)$$

Cuando N y D son coprimos, el término $N^{-1}E_{\mathcal{A}}(z)E_D(0,z)$ corresponde a una forma modular de peso 2 y nivel D, y contribuye en 0 a la traza, debido a que $\mathrm{Tr}_N^{ND}\{N^{-1}E_{\mathcal{A}}(z)E_D(0,z)\} = \mathrm{Tr}_1^D\{N^{-1}E_{\mathcal{A}}(z)E_D(0,z)\} = 0$ ya que no hay formas holomorfas de peso 2 y nivel 1.

Entonces sabemos que

$$L_{\mathcal{A}}(f,1) = 4\pi(f, \mathrm{Tr}_N^{ND}\{E_{\mathcal{A}}(z)E_D(0,Nz)\})_{\Gamma_0(N)}$$

y por otro lado, $E_D(0,z)$ se relaciona con la forma holomorfa de Einsenstein $E(z)$ como

$$E_D(0,z) = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}E(z)$$

Proposición 4.1.7. *Si N y D son primos distintos, entonces*

$$L_{\mathcal{A}}(f,1) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{D}}(f, G_{\mathcal{A}})_{\Gamma_0(N)}$$

donde $G_{\mathcal{A}}$ se define:

$$G_{\mathcal{A}} = Tr_N^{ND}\{E_{\mathcal{A}}(z)E(Nz)\} \tag{4.1}$$

A priori la forma modular $G_{\mathcal{A}}$ es distinta a la forma modular definida en 3.4. La demostración de la fórmula de Gross (teorema 3.3.2) consiste en probar que los coeficientes de Fourier de la forma $G_{\mathcal{A}}$ que acabamos de definir, coinciden con los coeficientes de Fourier de la forma modular 3.4.

El siguiente paso en la demostración es el cálculo explícito de la traza.

4.2. Cálculo de la traza

Sean $g_{\mathcal{A}}(z) = E_{\mathcal{A}}(z)E(Nz)$ y $G_{\mathcal{A}}(z) = \mathrm{Tr}_N^{ND} g$, el objetivo de esta sección es calcular los coeficientes de Fourier de la forma modular $G_{\mathcal{A}}$ de peso 2 para $\Gamma_0(N)$; en el caso N y D primos distintos.

Recordamos la notación utilizada para los coeficientes de la serie theta (3.1) y la serie de Einstenstein (3.2):

$$E_{\mathcal{A}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r_{\mathcal{A}}(m)q^m, \qquad E(z) = \sum_{m=0}^{\infty} R(m)q^m$$

Proposición 4.2.1. *Si D es primo, entonces:*

1. $G_{\mathcal{A}}(z) = g_{\mathcal{A}}(z) + \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{D-1} g_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+j}{D}\right)$

2. *Si $G_{\mathcal{A}}(z) = \sum_{m\geq 0} a_m q^m$ los coeficientes de Fourier a_m están dados por la fórmula:*

$$a_m = \sum_{n=0}^{Dm/N} r_{\mathcal{A}}(Dm-nN)\delta(n)R(n) = \frac{r_{\mathcal{A}}(m)h}{u} + \sum_{n=1}^{Dm/N} r_{\mathcal{A}}(Dm-nN)\delta(n)R(n)$$

donde $\delta(n) = \begin{cases} 1 & si\ \ (n,D)=1 \\ 2 & si\ \ n \equiv 0 \pmod{D} \end{cases}$

Para demostrar la proposición utilizaremos el siguiente lema.

Lema 4.2.2. *Sea el operador de peso k definido en 2.1.3.*

1. *Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ y $c \not\equiv 0 \pmod{D}$ entonces*

$$(E_{\mathcal{A}}|_1\gamma)(z) = \frac{\epsilon(c)}{i\sqrt{D}} E_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+c^*d}{D}\right)$$

donde c^* es el inverso de $c \pmod{D}$.

2. *Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ y $c \not\equiv 0 \pmod{D}$ entonces*

$$(E(Nz)|_1\gamma)(z) = \frac{-\epsilon(c)}{i\sqrt{D}} E\left(N\left(\frac{z+c^*d}{D}\right)\right)$$

Demostración. 1. Las coclases no triviales de $\Gamma_0(D)\backslash\Gamma_0(1)$ están representadas por las matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leq j < D$.

Usaremos $E_{\mathcal{A}}|_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}E_{\mathcal{A}}$, identidad que se demuestra utilizando la fórmula de adición de Poisson.

Si $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & D \end{pmatrix}$ (es decir, $c = 1$ y $c^*d = j$) entonces:

$$\begin{aligned} \left(E_{\mathcal{A}}|_1\gamma\right)(z) &= \left(E_{\mathcal{A}}|_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ D & 0 \end{pmatrix}\Big|_1 \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & D \end{pmatrix}\right)(z) \\ &= \left(\frac{1}{i}E_{\mathcal{A}}|_1 \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & D \end{pmatrix}\right)(z) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{D}}E_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+j}{D}\right) \end{aligned}$$

En el caso general $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(D)$ entonces $c = \delta$ y $c^*d \equiv j \pmod{D}$, y además:

$$E_{\mathcal{A}}|_1\gamma = \left(E_{\mathcal{A}}|_1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)\Big|_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

Como $E_{\mathcal{A}}$ es una forma modular de peso 1 y carácter ϵ para $\Gamma_0(D)$, entonces:

$$(E_{\mathcal{A}}|_1\gamma)(z) = \epsilon(\delta)E_{\mathcal{A}}|_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}(z) = \frac{\epsilon(c)}{i\sqrt{D}}E_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+c^*d}{D}\right)$$

2. Por definición $E = \sum_{\mathcal{B}\in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} E_{\mathcal{B}}$, entonces de acuerdo al primer punto del lema, es claro que $E|_1\gamma = \frac{\epsilon(c)}{i\sqrt{D}}E\left(\frac{z+c^*d}{D}\right)$. Utilizando la identidad:

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bN \\ c/N & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} E(Nz)|_1\gamma &= E|_1 \begin{pmatrix} a & bN \\ c/N & d \end{pmatrix}(Nz) \\ &= \frac{\epsilon(c/N)}{i\sqrt{D}}E\left(\frac{Nz+Nc*d}{D}\right) \\ &= \frac{\epsilon(c)}{i\sqrt{D}}E\left(N\left(\frac{z+c*d}{D}\right)\right) \text{ porque } \epsilon(N) = -1 \end{aligned}$$

□

Demostración. (Proposición 4.2.1)

1. Las $D+1$ coclases de $\Gamma_0(ND)\backslash\Gamma_0(N)$ están representadas por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y las matrices $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ tal que $c \not\equiv 0 \pmod{D}$ y $j = c^*d$ recorre las D las clases residuales $\pmod{D}$.

Sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ un representante de una coclase. Como

$$g_{\mathcal{A}}|_2\gamma = E_{\mathcal{A}}|_1\gamma \cdot E(Nz)|_1\gamma$$

entonces:

$$\begin{aligned} (g_{\mathcal{A}}|_2\gamma)(z) &= \frac{\epsilon(c)}{i\sqrt{D}} E_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+j}{D}\right) \frac{-\epsilon(c)}{i\sqrt{D}} E\left(N\left(\frac{z+j}{D}\right)\right) \\ &= \frac{1}{D} g_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+j}{D}\right) \end{aligned}$$

Si sumamos sobre todas las coclases obtenemos

$$G_{\mathcal{A}}(z) = g_{\mathcal{A}}(z) + \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{D-1} g_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+j}{D}\right)$$

2. Si $g_{\mathcal{A}}(z) = E_{\mathcal{A}}(z)E(Nz) = \sum_{m\geq 0} b_m q^m$, y $G_A(z) = \sum_{m\geq 0} a_m q^m$ el resultado demostrado en el punto anterior implica $a_m = b_m + b_{mD}$ porque

$$\frac{1}{D}\sum_{j=0}^{D-1} g_{\mathcal{A}}\left(\frac{z+j}{D}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{mD} q^m$$

Como $g_{\mathcal{A}}$ es un producto de series, podemos expresar cada término b_m como una convolución, donde las sumas a continuación son finitas, ya que $r_{\mathcal{A}}(n) = R(n) = 0$ si $n < 0$.

$$b_m = \sum_{l\geq 0} r_{\mathcal{A}}(m - lN)R(l) = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv 0(D)}} r_{\mathcal{A}}(mD - nN)R(n)$$

Para la segunda igualdad se toma $n = Dl$, ya que, como D es primo, hay un único ideal de norma D, por lo tanto $r_{\mathcal{A}}(k) = r_{\mathcal{A}}(Dk)$ y $R(k) = R(Dk)$ para $k \geq 1$. Entonces, utilizando el segundo término de la igualdad para b_m y el tercer término para $b_m D$ obtenemos

$$a_m = \sum_{\substack{n=0 \\ n\equiv 0(D)}}^{Dm/N} r_{\mathcal{A}}(mD - nN)R(n) + \sum_{l=0}^{Dm/N} r_{\mathcal{A}}(mD - lN)R(l)$$

En esta suma se ve fácilmente que si $(n, D) = 1$ entonces el término $r_{\mathcal{A}}(mD - nN)R(n)$ aparece sólo en la segunda suma, mientras si $n \equiv 0 \pmod{D}$ aparece en ambas.

$\square$

Los resultados demostrados hasta ahora se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.3. *Si N y D son primos distintos entonces,*

$$L_{\mathcal{A}}(f, 1) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{D}}(f, G_{\mathcal{A}}) \tag{4.2}$$

donde los coeficientes de Fourier a_m de $G_{\mathcal{A}}$ están dados por la fórmula:

$$a_m = \sum_{n=0}^{Dm/N} r_{\mathcal{A}}(Dm - nN)\delta(n)R(n)$$

donde $\delta(n) = \begin{cases} 1 & si\ \ (n, D) = 1 \\ 2 & si\ \ n \equiv 0 \pmod{D} \end{cases}$

4.3. Cálculo de alturas de puntos especiales

Sean B el álgebra de cuaterniones ramificada en $\{\infty, N\}$, y R un orden maximal fijo. Consideramos $D \neq N$ primo, donde $-D$ es el discriminante fundamental de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ y es x un punto especial de discriminante $-D$. El objetivo de esta sección es calcular los coeficientes de Fourier de la forma modular $\sum_{\mathcal{B}\in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} \phi([x_\mathcal{B}], [x_{\mathcal{BA}}])$ y observar que coinciden con los coeficientes de forma modular $G_\mathcal{A}$ definida en 4.1 cuyos coeficientes fueron calculados en el capítulo anterior obteniéndose el teorema 4.2.3. De esta forma quedará demostrada la fórmula de Gross (teorema 3.3.2).

Calcularemos $\langle [x_\mathcal{B}], t_m[x_{\mathcal{BA}}]\rangle$ para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$. Para ello recordamos la observación 2.3.8. Si $\mathcal{A} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$, consideramos $[x_\mathcal{A}]$ la clase de ideales a izquierda de R correspondiente a la primer coordenada del punto especial $x_\mathcal{A}$, y el ideal $I_\mathcal{A}$ es un representante de la clase $[x_\mathcal{A}]$. Entonces

$$\langle [x_\mathcal{B}], t_m([x_{\mathcal{BA}}])\rangle = \frac{1}{2}\#\mathrm{Hom}_{[m]}(I_\mathcal{B}, I_{\mathcal{BA}})$$

Si K es un cuerpo cuadrático imaginario para el cual existen inmersiones $f : K \to B$, la siguiente proposición dice que es posible identificar B con la suma de dos copias de K. Fijada una inmersión $f : K \to B$ es posible identificar B con $f(K) + f(K)j$, de forma tal que la inmersión f es una inclusión. Esta idea será muy útil en el cálculo de la acción de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ en cierto punto especial de discriminante $-D$.

Proposición 4.3.1. *El álgebra B se puede escribir como*

$$B = K + Kj$$

donde j se define tal que verifica $j^2 = -N$, y $j\alpha = \bar{\alpha}j$ para todo $\alpha \in K$.

Sea $\mathcal{D} = (\sqrt{-D})$, ideal de $\mathcal{O}$, y sea ε una solución a la congruencia $\varepsilon^2 \equiv -N \pmod{D}$. (La existencia de soluciones a tal congruencia está garantizada por la condición de existencia de inmersiones de K en B enunciada en 3.1.2). Entonces un punto especial de discriminante $-D$ se puede escribir sin pérdida de generalidad como $x = (I, i)$ donde:

$$\begin{aligned} i : K &\to K + Kj \\ \alpha &\mapsto \alpha + 0j \end{aligned}$$

$$L := R_d(I) = \{\alpha + \beta j : \alpha \in \mathcal{D}^{-1}, \beta \in \mathcal{D}^{-1}, \alpha \equiv \varepsilon\beta \pmod{\mathcal{O}_K}\} \tag{4.3}$$
$$R_i(I) = R$$

De ahora en más, x será el punto especial de discriminante $-D$, de forma tal que $x = (I, i)$ y L será su orden a derecha $R_d(I)$ de acuerdo a la ecuación 4.3. Para asegurar que x es un punto especial será necesario demostrar que el conjunto L es un orden maximal. Luego L es el orden a derecha de algún ideal I a izquierda de R y $x = (I, i)$ es un punto especial de discriminante $-D$.

Proposición 4.3.2. *El conjunto L (definido en 4.3) es un orden maximal de B*

Demostración. Para probar que L es un orden maximal bastará ver que la multiplicación es cerrada en L (es decir, que es un orden) y que $\text{disc}(L) = N^2$ (ver [10] capítulo 4). La multiplicación es cerrada porque

$$(\alpha + \beta j)(\gamma + \delta j) = \alpha\gamma - N\beta\bar{\bar{\delta}} + (\alpha\delta + \beta\bar{\gamma})j \text{ donde } \alpha\gamma - N\beta\bar{\bar{\delta}} \equiv \varepsilon(\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}) \pmod{\mathcal{O}_K}$$

Para ver que $\text{disc}(L) = N^2$ basta ver que $\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_K j \subsetneq L \subsetneq \mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1}j$, $\text{disc}(\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_K j) = D^2N^2$, $\text{disc}(\mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1}j) = \frac{1}{D^2}N^2$ y que $[\mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1}j : L] = D$, $[L : \mathcal{O}_K + \mathcal{O}_K j] = D$. $\square$

El punto especial $x = (I, i)$, es tal que el ideal I es un ideal a izquierda para nuestro orden maximal fijo R, y tiene como orden a derecha al ideal maximal L. El elemento $\mathcal{A} \in \text{Pic}(\mathcal{O}_K)$ actúa en el punto x como $x_{\mathcal{A}} = (I\, i(\mathfrak{a}), i)$ donde $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ de acuerdo a la definición 3.1.10. En la identificación de B con $K + Kj$, la inmersión i es la proyección sobre la primer coordenada ($i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + 0j$). Esto nos permite simplificar la notación de forma tal que $x_{\mathcal{A}} = (I\, i(\mathfrak{a}), i)$ se escribirá como $(I\mathfrak{a}, i)$. El ideal $I\mathfrak{a}$ es un representante de la clase $[x_{\mathcal{A}}]$.

Los lemas 4.3.3, 4.3.4 y 4.3.5 se utilizarán para probar el teorema 4.3.6 que da una expresión explícita de los elementos de $\text{Hom}(I\mathfrak{b}, I\mathfrak{b}\mathfrak{a})$ que luego nos permitirá calcular $\langle [x_{\mathcal{B}}], t_m[x_{\mathcal{B}\mathcal{A}}] \rangle$.

Lema 4.3.3. *Sea $x = (I, i)$ nuestro punto especial de discriminante $-D$ tal que $R_d(I) = L$, y $\mathcal{B}$ una clase de ideales de $\mathcal{O}_K$ con $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$. Entonces, $x_{\mathcal{B}} = (I\mathfrak{b}, i)$ verifica la siguiente identidad:*

$$R_d(I\mathfrak{b}) = R_d(L\mathfrak{b})$$

Demostración. Sea $\alpha \in R_d(I\mathfrak{b})$. Dado $u \in L\mathfrak{b}$ demostraremos $u\alpha \in L\mathfrak{b}$. De esta forma obtenemos la inclusión $R_d(I\mathfrak{b}) \subseteq R_d(L\mathfrak{b})$, y al ser ambos órdenes maximales, son iguales.

Si $u \in L\mathfrak{b}$ entonces $u = \sum h_i b_i$ donde $h_i \in L = R_d(I)$ verifica $Ih_i \subset I$, y $b_i \in \mathfrak{b}$. Para demostrar que $u\alpha \in L\mathfrak{b}$ basta ver que $Iu\alpha \subset I\mathfrak{b}$:

$$Iu\alpha = I\left(\sum h_i b_i\right)\alpha \subset I\mathfrak{b}\alpha \subset I\mathfrak{b}$$

$\square$

Lema 4.3.4. *Sea $x = (I, i)$ nuestro punto especial de discriminante $-D$, y sean $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Pic}(\mathcal{O}_K)$ entonces*

$$\text{Hom}(I\mathfrak{b}, I\mathfrak{b}\mathfrak{a}) = R_d([x_{\mathcal{B}}])\mathfrak{a}$$

Demostración. Por definición $\text{Hom}(I\mathfrak{b}, I\mathfrak{b}\mathfrak{a}) = \{\alpha \in B^* : (I\mathfrak{b})\alpha \subset I\mathfrak{b}\mathfrak{a}\}$, y $I\mathfrak{b}R_d([x_{\mathcal{B}}]) = I\mathfrak{b}$.

Entonces $I\mathfrak{b}\alpha \subset I\mathfrak{b}\mathfrak{a} = I\mathfrak{b}R_d([x_{\mathcal{B}}])\mathfrak{a} \iff \alpha \in R_d([x_{\mathcal{B}}])\mathfrak{a}$. $\square$

Lema 4.3.5. *Consideramos nuestro punto especial $x = (I, i)$ y el orden a derecha de I, $R_d(I) = L$ como en (4.3). Sea $\mathcal{B}$ una clase de ideales de $\mathcal{O}_K$ y $\mathfrak{b}$ un ideal en $\mathcal{B}$. Entonces $L\mathfrak{b}$ es un ideal a izquierda de L que verifica:*

$$L\mathfrak{b} = \{\gamma + \delta j : \gamma \in \mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}, \delta \in \mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}, \gamma \equiv \varepsilon\delta \pmod{\mathcal{O}_K}\}$$

Demostración. Sean $\alpha+\beta j\in L$ y $b\in\mathfrak{b}$, $b=m+n\sqrt{-D}$. Entonces

$$(\alpha+\beta j)b=\alpha b+\beta jb=\alpha b+\beta\bar{b}j\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}+\mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}j$$

Además verifica la congruencia $\alpha b\equiv\varepsilon\beta\bar{b}\pmod{\mathcal{O}_K}$ ya que $\alpha b-\varepsilon\beta\bar{b}=\alpha b-\varepsilon\beta(b-2n\sqrt{-D})=(\alpha-\varepsilon\beta)b-2n\beta\sqrt{-D}\in\mathcal{O}_K$ porque $\beta\sqrt{-D}\in\mathcal{D}^{-1}\mathcal{D}=\mathcal{O}_K$.

Esto prueba la inclusión $Lb\subseteq\{\gamma+\delta j:\gamma\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b},\delta\in\mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}},\gamma\equiv\varepsilon\delta\pmod{\mathcal{O}_K}\}$.

Para probar la otra inclusión, sea $y=\gamma+\delta j$ con $\gamma\in(\sqrt{-D})^{-1}\mathfrak{b}$, $\delta=\frac{\bar{b}}{\sqrt{-D}}\in(\sqrt{-D})^{-1}\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{b}=m-n\sqrt{-D}\in\bar{\mathfrak{b}}$ y $\gamma\equiv\varepsilon\delta\pmod{\mathcal{O}_K}$. Entonces existe $\lambda\in\mathcal{O}_K$ tal que $\gamma=\varepsilon\delta+\lambda$, y podemos escribir:

$$\begin{aligned} y &= \lambda+\varepsilon\delta+\delta j=\lambda+\varepsilon\frac{b-2n\sqrt{-D}}{\sqrt{-D}}+\frac{\bar{b}}{\sqrt{-D}}j \\ &= \lambda-2n\varepsilon+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{-D}}+\frac{1}{\sqrt{-D}}j\right)b\in L\mathfrak{b} \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.6. *Sea $x=(I,i)$ entonces:*

$$\mathrm{Hom}(I\mathfrak{b},I\mathfrak{b}\mathfrak{a})=\{\alpha+\beta j:\alpha\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{a},\beta\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}},\alpha\equiv\varepsilon\beta\pmod{\mathcal{O}_K}\}$$

Demostración. De acuerdo a los lemas 4.3.3, 4.3.4 y 4.3.5 basta probar:

$$\begin{aligned} &R_d(\{\gamma+\delta j:\gamma\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b},\delta\in\mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}},\gamma\equiv\varepsilon\delta\pmod{\mathcal{O}_K}\})\mathfrak{a}= \\ &\qquad\{\alpha+\beta j:\alpha\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{a},\beta\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}},\alpha\equiv\varepsilon\beta\pmod{\mathcal{O}_K}\} \end{aligned}$$

Sean:

$$J=\{\gamma+\delta j:\gamma\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b},\delta\in\mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}},\gamma\equiv\varepsilon\delta\pmod{\mathcal{O}_K}\}$$
$$L'=\{\alpha+\beta j:\alpha\in\mathcal{D}^{-1},\beta\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\bar{\mathfrak{b}},\alpha\equiv\varepsilon\beta\pmod{\mathcal{O}_K}\}$$

Observaremos que $R_d(J)=L'$, y el conjunto buscado será $L'\mathfrak{a}$ que de acuerdo al lema 4.3.5 coincide con lo que queremos demostrar.

Para ver que $R_d(J)=L'$ primero observamos que L' es un orden (ya que es un retículo y la multiplicación es cerrada en L'). Luego vemos que $L'\subset R_d(J)$ y como $\mathrm{disc}(L')=N^2$ se da la igualdad.

Sea $j=\gamma+\delta j\in J$ y $b=\alpha+\beta j\in L'$ veremos que $jb=(\gamma+\delta j)(\alpha+\beta j)\in J$, y por lo tanto $L'\subset R_d(J)$.

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\in\mathcal{D}^{-1}\\ \beta\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\\ \alpha\equiv\varepsilon\beta\pmod{\mathcal{O}_K}\end{array}\right.\quad\text{y}\quad\left\{\begin{array}{l}\gamma\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}\\ \delta\in\mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\\ \gamma\equiv\varepsilon\delta\pmod{\mathcal{O}_K}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\gamma\alpha-N\delta\bar{\beta}\in\mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}\\ \delta\bar{\alpha}+\gamma\beta\in\mathcal{D}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\\ \gamma\alpha-N\delta\bar{\beta}\equiv\varepsilon(\delta\bar{\alpha}+\gamma\beta)\pmod{\mathcal{O}_K}\end{array}\right.$$

□

A partir de este teorema podemos calcular $\langle [x_{\mathcal{B}}], t_m[x_{\mathcal{BA}}]\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle [x_{\mathcal{B}}], t_m[x_{\mathcal{BA}}]\rangle &= \frac{1}{2}\#\mathrm{Hom}_{[m]}(I\mathfrak{b}, I\mathfrak{ba}) \\ &= \frac{1}{2}\#\{\alpha+\beta j \in \mathrm{Hom}(I\mathfrak{b}, I\mathfrak{ba}) : \mathcal{N}(\alpha)+N\mathcal{N}(\beta) = m\mathcal{N}(\mathfrak{a})\}\end{aligned}$$

Entonces para calcular $\langle [x_{\mathcal{B}}], t_m[x_{\mathcal{BA}}]\rangle$ basta contar la mitad de los pares (α,β) tal que:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\alpha + N\mathcal{N}\beta = m\mathcal{N}\mathfrak{a} \\ &\alpha \in \mathcal{D}^{-1}\mathfrak{a} \\ &\beta \in \mathcal{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}} \\ &\alpha \equiv \varepsilon\beta \pmod{\mathcal{O}_K}\end{aligned}$$

De acuerdo a la proposición 3.2.3, es posible hacerlo a partir de contar los ideales:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L} = (\alpha)\mathcal{D}\mathfrak{a}^{-1} \in \mathcal{A}^{-1} \\ &\mathcal{L}' = (\beta)\mathcal{D}\mathfrak{b}^{-1}\bar{\mathfrak{b}}^{-1}\bar{\mathfrak{a}}^{-1} \in \mathcal{AB}^2\end{aligned}$$

que satisfacen: $\mathcal{NL} + N\mathcal{NL}' = mD$ y la congruencia $\alpha \equiv \varepsilon\beta \pmod{\mathcal{O}_K}$, y luego, calcular la cantidad de pares (α,β) buscados.

Proposición 4.3.7. *Si N y D son primos, entonces:*

$$\sum_{\mathcal{B}\in\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} \langle [x_{\mathcal{B}}], t_m[x_{\mathcal{AB}}]\rangle = u^2 \sum_{n=0}^{mD/N} r_{\mathcal{A}}(mD-nN)\delta(n)R(n)$$

donde δ es como en la proposición 4.2.1, es decir, $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } (n,D)=1 \\ 2 & \textit{si } n \equiv 0 \pmod{D}\end{cases}$

Demostración. Primero contaremos los pares de ideales $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases de ideales fijas, donde si $n = \mathcal{NL}'$ entonces $\mathcal{NL} = mD - nN$, (todavía no forzamos la congruencia $\alpha \equiv \varepsilon\beta \pmod{\mathcal{O}_K}$)):

$$r_{\mathcal{A}^{-1}}(mD) + \sum_{n>0} r_{\mathcal{A}^{-1}}(mD-nN) r_{\mathcal{AB}^2}(n)$$

Fijado un par de ideales $(\mathcal{L},\mathcal{L}')$, ambos no nulos, que satisfacen lo anterior, α y β pueden tomar $2u$ valores cada uno, ya que los elementos que generan un mismo ideal principal no trivial son de la forma $\xi\alpha$ con $\xi \in \mathcal{O}_K^*$.

Cuando $n \neq 0$ y $n \neq mD/N$, hay $4u^2$ posibilidades para (α,β), de las cuales, la condición $\alpha \equiv \varepsilon\beta \pmod{\mathcal{O}_K}$ siempre se satisface cuando $n \equiv 0 \pmod{D}$, y sólo en la mitad de los pares (α,β) cuando $n \not\equiv 0 \pmod{D}$. Entonces

$$\langle [x_{\mathcal{B}}], t_m[x_{\mathcal{AB}}]\rangle = u^2 \sum_{n=0}^{mD/N} r_{\mathcal{A}}(mD-nN)\delta(n) r_{\mathcal{AB}^2}(n)$$

Al sumar en las clases $\mathcal{B} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ el conjunto $\{\mathcal{A}\mathcal{B}^2 : \mathcal{B} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)\}$ tiene un único representante de cada clase de ideales ya que al ser primo D no hay elementos de orden 2 en $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$. Entonces $\sum\limits_{\mathcal{B}\in \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)} r_{\mathcal{A}\mathcal{B}^2} = R(n)$. Además $r_{\mathcal{A}^{-1}}(k) = r_{\mathcal{A}}(k)$ por lo que obtenemos el resultado enunciado.

$\square$

Por un lado, a partir del método de Rankin y el cálculo explícito de la traza se obtiene la expresión para el valor de la L-serie enunciado en 4.2.3. Por otro lado, el cálculo de la altura de los puntos especiales contando inmersiones de cuerpos cuadráticos en el álgebra de cuaterniones ramificada en N e infinito produce la misma expresión salvo una constante 4.3.7, demostrando el teorema 3.3.2:

$$L_{\mathcal{A}}(f,1) = \frac{8\pi^2}{u^2\sqrt{D}}(f, G_{\mathcal{A}})_{\Gamma_0(N)}.$$

Bibliografía

[1] M. Alsina, P. Bayer *Quaternion orders, Quadratic forms, and Shimura Curves* CRM Monograph Series, Centre de Recherches Mathematiques (2004).

[2] P. M. Cohn *Basic Algebra: Groups, Rings, and Fields* Springer (2003).

[3] F. Diamond, J. Shurman *A first course in modular forms* Graduate texts in mathematics, Springer (2005).

[4] M. Eichler *The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators* International Summer School on Modular Functions, Antwerp (1972).

[5] B. H. Gross. *Heights and the special values of L-series* Conference Proceedings of the CMS Vol 7, pp. 115–187 (1986).

[6] B. H. Gross, D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. 84 pp. 225-320 (1986).

[7] S. Lang. *Introduction to Modular Forms*, Springer (1976).

[8] A. Pacetti, G. Tornaría. *Shimura correspondence for level p^2 and the special values of L-series* Journal of Number Theory 124, Number 2 , pp. 396-414 (2007).

[9] G. Shimura. *On modular forms of half integral weight* Annals of Mathematics. (2) 97, pp. 440–481 (1973).

[10] M. Vigneras. *Arithmétique des algèbres de quaternions* Lecture notes in mathematics, Springer (1980).